Niveau : 2 **Orange**

Les fractions continues

1 Remarques préliminaires

Le développement en fraction continue d'un nombre réel x fournit une suite de fractions (donc de nombres rationnels) qui converge vers x. En un certain sens qu'on précisera, ces fractions constituent les meilleures approximations rationnelles possibles du nombre x.
Nous allons raisonner sur des nombres réels $x > 0$. Pour un tel réel x non entier il existe une décomposition et une seule sous la forme :

$$x = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1},$$

où a_0 est la partie entière de x_0 :

$$a_0 = \lfloor x_0 \rfloor.$$

Dans ce cas, comme $0 < \frac{1}{x_1} < 1$, on a $x_1 > 1$.

2 Le cas des nombres rationnels

Supposons que $x = \frac{u_0}{u_1}$ soit un nombre rationnel avec $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. Effectuons la division euclidienne :

$$u_0 = a_0 u_1 + u_2,$$

alors ou bien u_2 est nul, ou bien on peut écrire :

$$x = \frac{u_0}{u_1} = a_0 + \frac{1}{x_1},$$

avec $x_1 = \frac{u_1}{u_2}$. On réitère alors le procédé à partir de x_1.
Si la division euclidienne s'arrête à :

$$u_k = a_k u_{k+1},$$

c'est-à-dire que $x_k = a_k$, alors x s'écrit

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

On note alors dans ce cas :

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_k],$$

où les a_i sont des entiers ≥ 0, où pour $1 \leq i < k$ on a $a_i \geq 1$ et où a_k>1.
Une telle expression sera dite une fraction continue simple.

Théorème 2.1 *Tout nombre rationnel > 0 s'écrit d'une façon et d'une seule comme fraction continue simple et réciproquement toute fraction continue simple a pour valeur un nombre rationnel.*

3 Cas des nombres irrationnels

Désormais on suppose que x est un nombre irrationnel > 0. On écrit alors comme précédemment :

$$x = a_0 + e_1,$$

où a_0 est la partie entière de x et e_1 sa partie fractionnaire qui est un nombre irrationnel $0 < e_1 < 1$.
On pose alors :

$$x_1 = \frac{1}{e_1},$$

si bien que x_1 est un nombre irrationnel > 1. On peut donc réappliquer à x_1 la construction qui a été faite à partir de x. On définit ainsi par récurrence trois suites $(a_i)_{i \geq 0}$, $(e_i)_{i \geq 1}$, $(x_i)_{i \geq 1}$ de telle sorte que :

$$x_i = a_i + e_{i+1},$$

où a_i est la partie entière de x_i, e_i sa partie fractionnaire et où :

$$x_{i+1} = \frac{1}{e_{i+1}}.$$

Ainsi pour $i \geq 1$ on a $a_i \geq 1$, $0 < e_i < 1$, $x_i > 1$.
On peut alors écrire

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{k-1} + \cfrac{1}{x_k}}}}$$

mais cette fois-ci, il intervient dans l'écriture le nombre $x_k > 1$ qui lui n'est pas un entier mais un irrationnel. On se permettra d'écrire encore :

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, x_k],$$

avec maintenant les a_i entier > 0, avec $a_i \geq 1$ pour $1 \leq i < k$, et enfin x_k irrationnel > 1.

3.1 Généralisation des fractions continues simples

Soient $b_0, \cdots, b_k$ des réels > 0. On étudie pour $1 \leq i \leq k$ les expressions

$$c_i = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots \, b_{i-1} + \cfrac{1}{b_i}}}}$$

expressions qu'on notera encore :

$$c_i = [b_0, \cdots, b_i].$$

Posons alors :

$$p_0 = b_0 \quad p_1 = b_1 b_0 + 1,$$

$$q_0 = 1 \quad q_1 = b_1.$$

On définit par récurrence pour $2 \leq i \leq k$:

$$\begin{cases} p_i &= b_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= b_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}$$

Théorème 3.1 *Pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$ on a :*

$$c_i = \frac{p_i}{q_i}.$$

Théorème 3.2 *Pour tout $1 \leq i \leq k$ on a :*

$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1},$$

et pour tout $2 \leq i \leq k$ on a :

$$p_i q_{i-2} - q_i p_{i-2} = (-1)^i b_i.$$

Corollaire 3.3 *Pour tout $1 \leq i \leq k$ on a :*

$$c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-1}}$$

et pour tout $2 \leq i \leq k$ on a :

$$c_i - c_{i-2} = \frac{b_i(-1)^i}{q_i q_{i-2}}$$

Théorème 3.4 *La suite de terme général c_{2i} est strictement croissante.*
La suite de terme général c_{2i+1} est strictement décroissante.
Pour tout i, $c_{2i+1} > c_{2i}$.

3.2 Application aux réduites d'un nombre irrationnel

Nous allons appliquer l'étude précédente faite sur la généralisation des fractions continues simples, au développement d'un nombre irrationnel $x > 0$. On sait que $x = [a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, x_k]$. Introduisons alors comme dans le sous-paragraphe précédent les suites $(p_i)_i$ et $(q_i)_i$ définies par récurrence par :

$$p_0 = a_0 \quad p_1 = a_1 a_0 + 1,$$

$$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1,$$

et pour $2 \leq i \leq k$:

$$\begin{cases} p_i & = & a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i & = & a_i q_{i-1} + q_{i-2}\,. \end{cases}$$

Posons encore :

$$c_i = \frac{p_i}{q_i},$$

si bien que compte tenu des résultats du sous-paragraphe précédent nous pouvons écrire :

$$c_k = [a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Le nombre c_k est appelé la réduite d'ordre k du nombre x.

Remarque: Comme les nombres a_i sont des entiers il en est de même des nombres p_i et q_i. Les nombres c_i sont des nombres rationnels.

La relation $p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1}$ montre que p_i et q_i sont premiers entre eux.

Théorème 3.5 *Les deux suites $(c_{2i})_i$ et $(c_{2i+1})_i$ sont adjacentes et convergent vers x.*

Ceci justifie la notation :

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots].$$

Théorème 3.6 *On a l'inégalité :*

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}.$$

4 Cas des nombres irrationnels quadratiques

Un irrationnel quadratique est un nombre de la forme :

$$x = \frac{A + \sqrt{n}}{B},$$

où A, B, n sont des entiers ($n > 0$, $B \neq 0$). Ce sont les racines non rationnelles des équations du second degré à coefficients rationnels.

Théorème 4.1 *La fraction continue d'un irrationnel quadratique a une partie irrégulière et une partie périodique et réciproquement, si la fraction continue d'un nombre irrationnel est périodique à partir d'un certain rang, ce nombre est un nombre irrationnel quadratique.*

Ceci veut dire que :

$$x = [a_0, \cdots, a_k, a_{k+1} \cdots a_{k+u}, a_{k+1} \cdots a_{k+u}, \cdots].$$

5 Comparaison des réduites à d'autres approximations rationnelles

Théorème 5.1 *Si une fraction $\frac{p}{q}$ irréductible approche mieux x que la réduite $\frac{p_n}{q_n}$ alors $p > p_n$ et $q > q_n$.*

Théorème 5.2 *Si :*

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{2q^2},$$

alors $\frac{p}{q}$ est une réduite de x.

Auteur : Ainigmatias Cruptos
Diffusé par l'Association ACrypTA